SESSION DE 1995

DURÉE : 4 heures

Le problème est d'étudier le maximum de fonctions sous contraintes. Les candidats gênés par $\mathbb{R}^n$ pourront, sans être pénalisés, se limiter au cas $n = 2$ dans les questions où la valeur de n n'est pas imposée par l'énoncé.

Partie I. Ensembles convexes

Un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si

$$x \in A,\ y \in A \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

1. Cas $n = 1$.

   (a) Montrer qu'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (soit $[a,b]$) est convexe.

   (b) Montrer que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas convexe.

2. Cas $n = 2$.

   (a) Soit (a,b,c) trois réels. Montrer que l'ensemble A défini par

   $$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid au + bv \leq c\}$$

   est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2\,.$$

   (c) Soit $\alpha \geq 0$. Montrer que l'ensemble A défini par

   $$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq \alpha\}$$

   est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

   (d) Soit $\alpha \geq 0$. Donner la nature de la conique

   $$C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 - uv = \alpha\}.$$

   Montrer que l'ensemble $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2-uv \leq \alpha\}$ est convexe.

3. Cas général. Soient $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ des convexes de $\mathbb{R}^n$.

   (a) On suppose que $A = \cap_{i=1}^k A_i$ est non vide. Montrer que A est convexe.

   (b) Montrer sur un contre-exemple que $\cup_{i=1}^k A_i$ n'est pas un convexe en général.

Partie II. Fonctions concaves et quasi-concaves

Dans toute cette partie, A désigne un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur A à valeurs réelles.

1. Fonctions concaves.
   La fonction f est dite concave sur A si

$$\forall (x,y) \in A \times A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

   (a) La fonction $f(x) = -x^2$ est-elle concave sur $\mathbb{R}$? Représenter graphiquement l'ensemble $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -x^2 \geq t\}$.

   (b) Soient x et y deux points de A et g la fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = f(tx + (1-t)y).$$

   Montrer que f est concave sur A si et seulement si, pour tout choix de (x,y), la fonction g est concave sur $[0,1]$.

   (c) Montrer que f est concave sur A si et seulement si

$$C = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times A \mid f(x) \geq t\}$$

   est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Fonctions quasi-concaves.
   La fonction f est dite quasi-concave sur A si

$$\forall (x,y) \in A \times A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y)).$$

   (a) Montrer qu'une fonction concave sur A est quasi-concave sur A.

   (b) Dans le cas $n = 1$, montrer qu'une fonction définie et monotone sur un intervalle I est quasi-concave. Donner un exemple de fonction quasi-concave non concave.

   (c) Dans le cas $n = 1$, soit $a < b < c$. Montrer qu'une fonction continue croissante sur $[a,b]$ et décroissante sur $[b,c]$ est quasi-concave sur $[a,c]$.

   (d) Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) f est quasi-concave sur A,
   (ii) $\forall (x,y) \in A^2$, $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) \geq c \\ f(y) \geq c \end{cases} \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq c,\ \forall \lambda \in [0,1],$$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\}$ est vide ou est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

(e) Montrer que f est quasi-concave sur A si et seulement si pour tout choix de $(x, y) \in A \times A$, la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = f(tx + (1-t)y)$$

est quasi-concave sur $[0, 1]$.

3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(u, v) = uv - u^2 - v^2$$

est quasi-concave. Est-elle concave?

Partie III. Fonctions différentiables

On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite de classe C^1 si elle admet en tout point des dérivées partielles continues.
On note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x, c'est-à-dire l'élément de $\mathbb{R}^n$ de composantes $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), 1 \leq i \leq n)$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, on note $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Dans toute cette partie, f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit x, y deux points de $\mathbb{R}^n$ et g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = f(tx + (1-t)y)\,.$$

Montrer que g est de classe C^1 et que

$$g'(t) = \nabla f(tx + (1-t)y) \cdot (x - y)\,.$$

Donner en particulier les valeurs de $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.

2. Soit f une fonction concave sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de classe C^1.

(a) Soient $x < z < y$ trois points de I. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$, que l'on explicitera, tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
Montrer que $f(z) - f(y) \geq \lambda\,(f(x) - f(y))$, puis que

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,.$$

En déduire que

$$f'(y)\,(y - x) \leq f(y) - f(x)\,.$$

(b) Par une démarche similaire, montrer que si $x < y$ sont deux points de I, $f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x)$.

(c) Montrer que pour tout choix de (x, y) dans I,

$$f(y) \geq f(x) + f'(y)(y - x).$$

(d) Montrer que si x^* est un point de I tel que $f'(x^*) = 0$, alors x^* est un maximum de f.

3. (a) La fonction $x \to e^{-x^2}$ est-elle concave sur $\mathbb{R}$? (On pourra utiliser b) Quasi-concave?

(b) L'application $(u, v) \to e^{-(u^2+v^2)}$ est-elle concave sur $\mathbb{R}^2$? Quasi-concave?

4. Soit f une fonction concave de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. En utilisant la fonction g définie au III.1, montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(x) \cdot (x - y).$$

5. On suppose ici que f est quasi-concave sur $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 et que $f(y) \geq f(x)$. Soit g la fonction associée au couple (x, y) comme en III.1. Montrer que $g(t) - g(1) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que $g'(1) \leq 0$, puis que

$$\nabla f(x) \cdot (y - x) \geq 0.$$

6. On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$f(y) \geq f(x) \Longrightarrow \nabla f(x) \cdot (y - x) \geq 0.$$

On désire montrer que f est quasi-concave.

(a) Soit x, y deux points de $\mathbb{R}^n$ et g la fonction associée à ce couple. Montrer que

$$\forall s, t \in [0, 1],\ g(t) \geq g(s) \Longrightarrow (t - s)g'(s) \geq 0.$$

(b) Montrer que si pour tout $s \in [0, 1]$, $g'(s) \geq 0$, alors g est quasi-concave.

(c) On se place dans le cas où il existe $s \in [0, 1]$ tel que $g'(s) < 0$. On pose

$$\alpha = \inf\{s \in [0, 1] \mid g'(s) < 0\}.$$

Montrer que $\alpha < 1$.
Montrer que $\forall t \in [0, \alpha[\,, g'(t) \geq 0$ et que

$$\forall \eta > 0,\ \exists u(\eta) \in (\,]\alpha, \alpha + \eta[\cap [0, 1]),\ g'(u(\eta)) < 0.$$

Montrer que $\forall t > u(\eta),\ g(t) < g(u(\eta))$.

(d) En déduire que $\forall t \in]\alpha, 1]$, $g'(t) \leq 0$.

(e) Conclure.

Partie IV. Maximisation sous contraintes

On s'intéresse au problème de maximisation de fonction quasi-concave sous contraintes.
Dans toute cette partie, f désigne une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, quasi-concave, de classe C^1. Les fonctions $(h_j, j = 1, \ldots, p)$ sont concaves de classe C^1, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le problème suivant:
Soit K l'ensemble où les contraintes sont satisfaites, défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|h_j(x) \geq 0, \forall j = 1, \ldots, p\}.$$

Le problème est de trouver $x^* \in K$ tel que

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in K.$$

1. Montrer que K est convexe.

2. On suppose qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et des nombres réels $(\lambda_j; j = 1, \ldots, p)$ tels que

$$(*) \begin{cases} \bar{x} \in K \\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, p, \\ \lambda_j h_j(\bar{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, p, \\ \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \nabla f(\bar{x}) \neq 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\forall x \in K$, $\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \leq 0$.

   (b) On suppose qu'il existe $x \in K$ tel que $f(x) > f(\bar{x})$. Montrer qu'on peut trouver $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ avec $\nabla f(\bar{x}) \cdot \epsilon < 0$ et $f(x + \epsilon) > f(\bar{x})$. Aboutir ainsi à une contradiction et montrer que $\forall x \in K$, $f(x) \leq f(\bar{x})$.

3. Application: Trouver le(s) point(s) qui réalise(nt) le maximum de $uv - u^2 - v^2$ sous la contrainte $v - 2 \geq 0$. Donner une interprétation graphique.